Abitrainer

Dein Abitur

Baden-Württemberg

Aufgaben zum neuen länderübergreifenden Abitur (ohne GTR)

Allgemeinbildendes Gymnasium & Berufliches Gymasium

Liebe zukünftige Abiturientin, lieber zukünftiger Abiturient,

mit diesem Buch wollen wir Dir die Vorbereitung auf das Mathematik-Abitur so einfach wie möglich machen. Uns ist es vor allem wichtig, die Standardaufgaben herauszuarbeiten und Dir zu zeigen, mit welchen „Kochrezepten" man diese Aufgabentypen lösen kann.

Je nach mathematischem Teilgebiet (Analysis, Stochastik und Geometrie) sieht ein Kochrezept in unserem Buch zum Beispiel so aus:

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Tiefpunkt (Minimum).

positiv
⇨ TP

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Hochpunkt (Maximum).

negativ
⇨ HP

Unser Abitrainer ist als Ergänzung zu unserem Kursbuch gedacht, welches wir in unseren deinabitur-Vorbereitungskursen verwenden. In unseren Kursen gehen wir die verschiedenen Themen durch, üben die Kochrezepte und Standardaufgaben ein und erklären Dir, an welchen Keywords Du erkennst, welcher Aufgabentyp vorliegt. Danach solltest Du an einer kompletten Abituraufgabe üben, wie Du im größeren Kontext anhand der verschiedenen „Keywords" die Standardaufgabentypen erkennst.
Und genau an dieser Stelle soll dieser Abitrainer einsetzen.
Wenn Du beim Lesen einer Aufgabe nicht weißt, was Du tun sollst, dann schaue nochmal im Kursbuch in den entsprechenden Kapiteln nach, bevor Du in die Lösung schaust!
Zur Orientierung haben wir Dir in der ersten Abituraufgabe (Abi 2017 beruflich)
bei den Angaben am Rand jeweils den Verweis auf die relevanten Kapitel des Kursbuches aufgeschriebes. Wenn Du also bei einer Aufgabe nicht weißt, was Du tun sollst und am Rand steht zum Beipiel 2.6 und 3.2 bedeutet dies, dass Du in diesen Kapiteln im Kursbuch die Kochrezepte, Beispielaufgabentypen, Formeln u.s.w. findest, die Du zum Lösen dieser Aufgabe benötigst.
In den weiteren Abiaufgaben wirst Du bald auch ohne die Verweise erkennen, welcher Aufgabentyp vorliegt.

Wir wünschen Dir für Dein Abitur viel Erfolg!

Dein Team von deinabitur

Autor: Martin Weckerle, 86159 Augsburg
Druck: KRAUS druck & medien GmbH, 86316 Friedberg
Illustration Comics: Sebastian Eccius, 86368 Gersthofen

Inhaltsverzeichnis

Aufgaben ohne WTR

Analysis

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Angabe S. 1
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Lösung S. 3-6

Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 1 - Angabe S. 45
Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 1 - Lösung S. 47-49

Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Angabe S. 89
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Lösung S. 91-92

Stochastik

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Angabe S. 2
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Lösung S. 7-8

Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 1 - Angabe S. 46
Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 1 - Lösung S. 51-52

Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Angabe S. 90
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Lösung S. 97-98

Geometrie

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Angabe S. 2
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Lösung S. 9-11

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Angabe S. 46
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 1 - Lösung S. 53-54

Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Angabe S. 90
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Lösung S. 93-96

Aufgaben mit WTR

Analysis

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 2 - Aufgabe 1 - 4 Angabe S. 13-16
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 2 - Aufgabe 1 - 4 - Lösung S. 17-27

Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 2 - Aufgabe 1 - 4 Angabe S. 55-58
Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 2 - Aufgabe 1 - 4 - Lösung S. 59-72

Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil   Angabe S. 89
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Plichtteil - Lösung S. 91-92

Stochastik

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 3 Aufgabe 1 und 2 - Angabe S. 29-30
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 3 Aufgabe 1 und 2 - Lösung S. 31-38

Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 3 Aufgabe 1 und 2 - Angabe S. 73-74
Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 3 Aufgabe 1 und 2 - Lösung S. 75-82

Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 1 - Angabe S. 129
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 1 - Lösung S. 131 -133
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 2 - Angabe S. 130
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 2 - Lösung S. 134 -137

Geometrie

Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 4 - Angabe S. 39
Berufliches Gymnasium Abi 2017 Teil 4 - Lösung S. 40 - 43

Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 4 - Angabe S. 83
Berufliches Gymnasium Abi 2018 Teil 4 - Lösung S. 84 - 87

Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 1 - Angabe S. 117
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 1 - Lösung S. 119 - S.123
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 2 - Angabe S.118
Allgemeinbildendes Gymnasium Musterabi 2019 Wahlteil Aufgabe 2 - Lösung S. 125 - S.128

Dein Abitur

Analysis Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg

Teil 1

2.1

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ an.

(2 VP)

4.5 ; 4.6

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:

$g'(3) = 2$

$g''(3) = 0$

$g'''(3) \neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen ?

(2 VP)

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$

4.5

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagerechte Tangente hat.

(3 VP)

5.3

1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(0/5) verläuft.

(3 VP)

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$

1.4.1 Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 1$

1 Skizze Cos
5.5 Aufgabe 2

Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a, sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise. (3 VP)

1.2
Aufgabe 3

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x+2)$, $x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht.

(2 VP)

Stochastik Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg

Teil 1

2.1 Ein Experiment gelingt in 50% aller Fälle.

6.5.2

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal gelingt.

(3 VP)

2.2 A und B sind zwei beliebige Ereignisse.
Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt beträgt 42%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt 28%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt 18%.

Kapitel 3, Teil 5

Zeigen Sie: $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$

(4 VP)

Nicht für BW-allgemein

Geometrie Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg

Teil 1

Gegeben sind die Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ r\in\mathbb{R}$$

und

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \ s\in\mathbb{R}$$

3.1 Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage.

5.3

(3 VP)

3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_3, die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet.

Kapitel 3 1.1

(2 VP)

3.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_4, die g_1 rechtwinklig schneidet. Geben Sie den Abstand von g_1 zur x_1x_2-Ebene an.

Kapitel 3 2.7.3; 4.5 6.3.2

(3 VP)

Analysis Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg

Teil 1

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x)=3\cdot x^3-27\cdot x,\ x\in\mathbb{R}$ an.

$$f(x)=0$$
$$3\cdot x^3-27\cdot x=0$$
$$3x\cdot(x^2-9)=0$$

Nullstellen
f(x) = 0

Nach dem Satz vom Nullprodukt folgt:

$x_1=0$ oder $x^2-9=0$

$$x^2-9=0 \quad |+9$$
$$x^2=9 \quad |\sqrt{\ }$$
$$x_{2,3}=\pm 3$$

Satz vom Nullprodukt
Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist.

Die Nullstellen von f sind $x_1 = 0$, $x_2 = -3$ und $x_3 = 3$.

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:

$g'(3)=0 \qquad g''(3)=0 \qquad g'''(3)\neq 0$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?

Aussage von $g'(3)=0$

An der Stelle x =3 besitzt das Schaubild der Funktion g die Steigung 0. Das Schaubild hat somit bei x = 3 eine waagrechte Tangente (Extrem- oder Terrassenpunkt).

waagrechte Tangente
$f'(x)=0$

Aussage von $g''(3)=0$ und $g'''(3)\neq 0$

Die beiden Bedingungen formulieren zusammen die Kriterien für eine Wendestelle des Schaubilds von g an der Stelle x = 3.

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x)=e^{2x}-4\cdot x;\ x\in\mathbb{R}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagerechte Tangente hat.

Die Bedingung für eine waagrechte Tangente des Schaubilds von g an einer Stelle x lautet: $h'(x)=0$.

Mithilfe der Kettenregel folgt:

$$h(x)=e^{2x}-4\cdot x$$
$$h'(x)=e^{2x}\cdot 2-4=2\cdot e^{2x}-4$$

Kettenregel
$u(v(x))'=u'(v(x))\cdot v'(x)$

Stelle x mit waagrechter Tangente ermitteln:

$$\begin{aligned} h'(x)&=0 \\ 2\cdot e^{2x}-4&=0 && |+4 \\ 2\cdot e^{2x}&=4 && |:2 \\ e^{2x}&=2 && |\ln(\ldots) \\ \ln(e^{2x})&=\ln 2 \\ 2x&=\ln 2 && |:2 \\ x&=\frac{1}{2}\ln 2 \end{aligned}$$

$\ln(e^x)=x$

y-Koordinate berechnen:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)&=e^{2\cdot\frac{1}{2}\ln 2}-4\cdot\frac{1}{2}\ln 2 \\ &=e^{\ln 2}-2\ln 2 \\ &=2-2\ln 2 \end{aligned}$$

$e^{\ln b}=b$

Im Punkt $\left(\frac{1}{2}\ln 2\middle|\, 2\cdot(1-\ln 2)\right)$ hat das Schaubild von g eine waagrechte Tangente.

1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h, deren Schaubild durch den Punkt P(0 | 5) verläuft.

Die Stammfunktionen H der Funktion h lauten:

$$\begin{aligned} h(x)&=e^{2x}-4\cdot x \\ H(x)&=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}-4\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+C \\ &=\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+C \end{aligned}$$

$f(x)=e^{bx}$

$F(x)=\frac{1}{b}\cdot e^{bx}+C$

Da das Schaubild der gesuchten Stammfunktion durch den Punkt P(0 | 5) verlaufen soll, muss die Bedingung $H(0)=5$ gelten.

$$H(0)=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{2\cdot 0}-2\cdot 0^2+C=5 \Leftrightarrow \frac{1}{2}+C=5 \Leftrightarrow C=4{,}5$$

Die gesuchte Stammfunktion lautet: $H(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2x^2+4{,}5$

Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg

Teil 2

I Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=0,5\cdot x^4+x^3+1;\ x\in\mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K.

1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K.

Die erste, zweite und dritte Ableitungsfunktion von f lauten:

$$f'(x)=2x^3+3x^2$$
$$f''(x)=6x^2+6x$$
$$f'''(x)=12x+6$$

Ableitung einer Potenzfunktion
$f(x)=x^r \Rightarrow f'(x)=r\cdot x^{r-1}$

Teil 1: Extrempunkte und Wendepunkte von K

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Tiefpunkt (Minimum).

positiv
⇨ TP

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Hochpunkt (Maximum).

negativ
⇨ HP

$$f'(x)=0$$
$$2x^3+3x^2=0$$
$$x^2\cdot(2x+3)=0$$

$x^2=0$
$x_1=0$

$2x+3=0 \quad |-3$
$2x=-3 \quad |:2$
$x_2=-\frac{3}{2}$

Satz vom Nullprodukt
Ein Produkt ist genau dann gleich 0, wenn einer der Faktoren gleich 0 ist.

Anmerkung
Die doppelte Nullstelle $x_1=0$ ohne VZW von f‘ weist auf einen Terrassenpunkt hin (waagrechte Tangente bei unverändertem Monotonieverhalten).

$$f''\left(-\frac{3}{2}\right)=6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)^2+6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=6\cdot\frac{9}{4}-9=\frac{27}{2}-9=\frac{9}{2}>0$$

Somit hat das Schaubild K von f an der Stelle $x_2=-\frac{3}{2}$ einen Tiefpunkt.

$$f''(0)=6\cdot 0^2+6\cdot 0=0$$

Damit ist das notwendige Kriterium für einen Wendepunkt an der Stelle $x_1=0$ erfüllt.

Wendepunkt

1) $f''(x_W) = 0$ und $f'''(x_W) \neq 0$ oder

2) f'' hat bei $x = x_W$ einen VZW (Krümmung **ändert** sich)

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 6x^2 + 6x &= 0 \\ 6x \cdot (x+1) &= 0 \end{aligned}$$

vgl. $x_1 = 0$ $\qquad$ $x + 1 = 0 \quad |-1$

$x_3 = -1$

$$\begin{aligned} f'''(0) &= 12 \cdot 0 + 6 \\ &= 6 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(-1) &= 12 \cdot (-1) + 6 \\ &= -6 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Also besitzt das Schaubild K an den Stellen $x_1 = 0$ und $x_3 = -1$ einen Wendepunkt. Da zusätzlich $f'(x_1) = f'(0) = 0$ gilt, hat K an der Stelle $x_1 = 0$ einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente, das heißt einen Terrassenpunkt.

y-Koordinate des Tiefpunkts an der Stelle $x_2 = -\frac{3}{2}$ berechnen:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{2}\right) &= 0,5 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^4 + \left(-\frac{3}{2}\right)^3 + 1 \\ &= 0,5 \cdot \frac{81}{16} - \frac{27}{8} + 1 \\ &= \frac{81}{32} - \frac{108}{32} + \frac{32}{32} \\ &= \frac{5}{32} \end{aligned}$$

$y_T = f(x_T)$

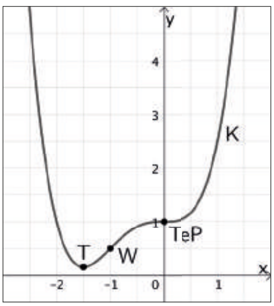
Das Schaubild K besitzt den Tiefpunkt $T\left(-\frac{3}{2} \middle| \frac{5}{32}\right)$.

y-Koordinate des Wende- und Terrassenpunkts berechnen:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 0,5 \cdot (-1)^4 + (-1)^3 + 1 \\ &= 0,5 \cdot 1 - 1 + 1 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 0,5 \cdot 0^4 + 0^3 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

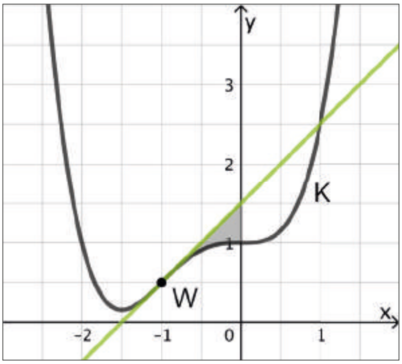
Das Schaubild K besitzt den Wendepunkt W(-1 | 0.5) und den Terrassenpunkt TeP(0 | 1).



Teil 2: Zeichnung des Schaubilds K von f

Für das Zeichnen von K können weitere Funktionswerte von f berechnet werden.

1.1.2 Das Schaubild K, die Tangente von K an der Stelle x = -1 und die y-Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.



Fläche zwischen zwei Funktionsgraphen

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|$$

Bei „oberer Graph" minus „unterer Graph" sind keine Betragsstriche erforderlich.

Gleichung der Tangente an der Stelle x = -1 aufstellen:

Der Berührpunkt der Tangente an der Stelle x = -1 entspricht dem Wendepunkt W(-1 | 0,5).

1) $y = mx + b$

2) $f'(x) = 2x^3 + 3x^2$

3) $m = f'(-1) = 2\cdot(-1)^3 + 3\cdot(-1)^2 = 1$

4) Wendepunkt W(-1 | 0,5)

5) $\underset{\uparrow \atop 0,5}{y} = \underset{\uparrow \atop 1}{m} \cdot \underset{\uparrow \atop -1}{x} + b \qquad \Rightarrow b = 1,5$

6) $y = x + 1,5$

Tangentensteigung

$m_T = f'(x_0)$

Berechnung des Flächeninhalts:

$$A = \int_{-1}^{0} [x + 1,5 - (0,5x^4 + x^3 + 1)]dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (-0,5x^4 - x^3 + x + 0,5)dx$$

$$= [-0,1x^5 - 0,25x^4 + 0,5x^2 + 0,5x]_{-1}^{0}$$

$$= 0 - (0,1 - 0,25 + 0,5 - 0,5) = 0,15$$

HDI

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt 0,15 FE.

1.1.2 Bestimmen Sie a und b, sodass die Ebene E in Normalenform als

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 0$$ geschrieben werden kann.

Aus der Ebenegleichung in Normalenform in Vektordarstellung lässt sich der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ ablesen.

Zudem liegt der Aufpunkt $(0\,|\,0\,|\,a)$ in der Ebene E.

Normalenform in Vektordarstellung

$E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$

$\vec{n}$: Normalenvektor von E

$\vec{A}$: Stützvektor von E

Damit die Ebenengleichungen aus 1.1.2 und 1.1.1 ein und dieselbe Ebene E beschreiben, muss der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ ein Vielfaches des aus der Koordinatenform bekannten Noramlenvektors $\vec{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ sein.

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 3 \Rightarrow b = -9$$

Aus Aufgabe 1.1.1 ist bekannt, dass der Punkt $S_{x_3}(0\,|\,0\,|-4)$ in der Ebene E liegt. Ein Vergleich mit den Koordinaten des Aufpunkts $(0\,|\,0\,|\,a)$ ergibt a = -4.

Anmerkung
Die Aufgabe kann auch gelöst werden, wenn der Punkt $S_{x_3}(0\,|\,0\,|-4)$ aus Aufgabe 1.1.1 nicht bekannt ist. Hierfür wird die Ebenengleichung aus 1.1.2 in die Koordinatenform umgewandelt und mit der Koordnatenform aus Aufgabe 1.1.1 verglichen.

1.1.2 Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1\,|\,0\,|\,1)$ zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat.

Die Prüfung erfolgt mithilfe der aus der Merkhilfe bekannten Formel für den Abstand Punkt - Ebene.

Abstand Punkt - Ebene

$$d(P;E) = \left| \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2 + n_3 p_3 + n_0}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

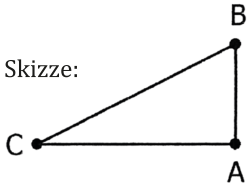
$$d(P;E) = \left| \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 12}{\sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2}} \right| = \left| \frac{-13}{\sqrt{13}} \right| = \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \checkmark$$

1.2 Gegeben sind die Punkte A(0 | 0 | 2) und B(0 | 0 | 4).
Ein weiterer Punkt C erfüllt folgende Bedingungen:

(1) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = 0$

(2) $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6$

Skizze:



1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch

Bedingung (1): Die Verbingungsvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind zueinander senkrecht und das Dreieck ABC ist somit bei A rechtwinklig.

Bedingung (2): Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 6 FE.

1.2.2 Bei Rotation der Fläche um die Achse AB entsteht ein Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Ein möglicher Punkt C hat die Koordinaten (c | c | 2) mit c > 0.
Bestimmen Sie den Wert von c.

Teil 1: Volumen des Rotationskörpers

Der entstehende Rotationskörper ist ein gerader Kreiskegel.
Für das Volumen des Kegels gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \overline{AC}^2 \cdot \pi \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3} \cdot |\overrightarrow{AC}|^2 \cdot \pi \cdot |\overrightarrow{AB}|$$

Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ berechnen:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

Verbindungsvektor
$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$
„Spitze minus Fuß“

Länge eines Vektors
$\vec{P} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$

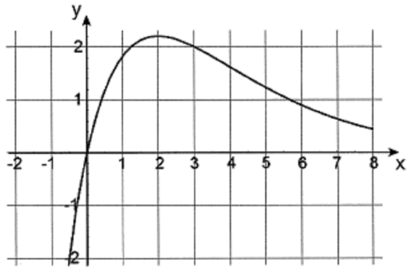
Die Berechnung der Länge des Vektors $\overrightarrow{AC}$ kann mithilfe der aus Aufgabe 1.2.1 bekannten Eigenschaften des Dreiecks ABC erfolgen.

$$A_{ABC} = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| = 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC}| \cdot 2 = 6 \Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}| = 6$$

Analysis Berufliches Gymnasium Baden-Württemberg

Teil 1

1.1 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K_f einer Funktion f.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie.

(1) Es gilt: $f''(1) < 0$

(2) Die Steigung von f an der Stelle x = 0 ist kleiner als die durchschnittliche Änderungsrate von f im Intervall [0;3].

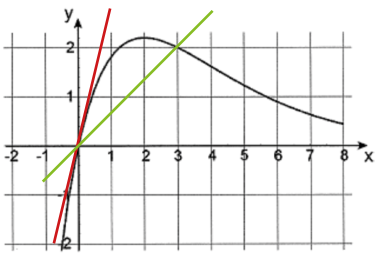
(3) Das Schaubild jeder Stammfunktion F von f hat an der Stelle x = 0 einen Tiefpunkt.

Aussage (1)

Aussage (1) ist wahr. Das Schaubild K_f ist an der Stelle x = 1 rechtsgekrümmt. Somit ist f'' an der Stelle x = 1 negativ.

Aussage (2)

Aussage (2) ist falsch. Die Steigung der Tangente an der Stelle x = 0 ist größer als die Steigung der Sekante durch die Punkte (0 | f(0)) und (3 | f(3)).



Aussage (3)

Aussage (3) ist wahr. Das Schaubild K_f besitzt an der Stelle x = 0 eine einfache Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von – nach +. Somit gilt $F'(x) < 0$ für $x < 0$ und $F'(x) > 0$ für $x > 0$. Folglich hat das Schaubild jeder Stammfunktion F von f an der Stelle x = 0 einen Tiefpunkt.

Stammfunktion
$F'(x) = f(x)$

1.2 Berechnen Sie die erste Ableitung g‘ für die jeweilige Funktion g.

(1) $g(x) = (2x+1)^2$
(2) $g(x) = (x+1) \cdot e^x$

Teil 1: Ableitung g‘ von $g(x) = (2x+1)^2$

1. Möglichkeit: Kettenregel anwenden

$$g(x) = (2x+1)^2$$

$$g'(x) = 2 \cdot (2x+1) \cdot 2$$
$$= 4 \cdot (2x+1)$$
$$= 8x + 4$$

Kettenregel
$u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

2. Möglichkeit: Ausmultiplizieren und ableiten

Mithilfe der 1. Binomischen Formel ergibt sich:

$$g(x) = \underbrace{(2x+1)^2}_{(a+b)^2} = \underbrace{4x^2 + 4x + 1}_{a^2 + 2ab + b^2}$$

$$g'(x) = 4 \cdot 2x + 4 = 8x + 4$$

Teil 2: Ableitung g‘ von $g(x) = (x+1) \cdot e^x$

Hierfür wird die Produktregel angewendet.

$$g(x) = (x+1) \cdot e^x$$

$$g'(x) = 1 \cdot e^x + (x+1) \cdot e^x$$
$$= e^x \cdot (1 + x + 1)$$
$$= e^x \cdot (x+2)$$

Produktregel

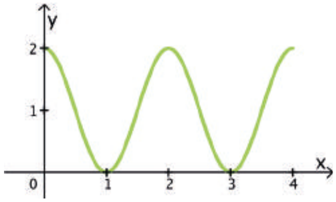
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

1.3 Gegeben ist die Funktion h durch $h(x) = \cos(\pi \cdot x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$

1.3.1 Skizzieren Sie das Schaubild von h für $0 \leq x \leq 4$.

Das Schaubild der Funktion h besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ und ist gegenüber dem Schaubild der Kosinusfunktion um 1 LE in y-Richtung verschoben.



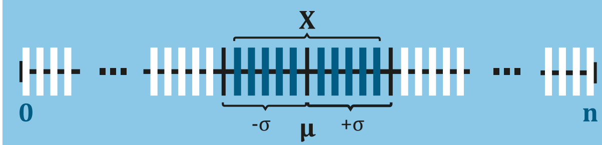
Allg. Sinus- / Kosinusfunktion

$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d \quad (a, b \neq 0)$

Amplitude $|a|$, Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$

Teil 1: Erwartungswert und Standardabweichung von X

Erwartungswert und Standardabweichung



$P_p^n(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma)$

X ist nach n = 500 und p = 0,005 binomialverteilt.

Erwartungswert: $\mu = E(X) = 500 \cdot 0{,}005 = 2{,}5$

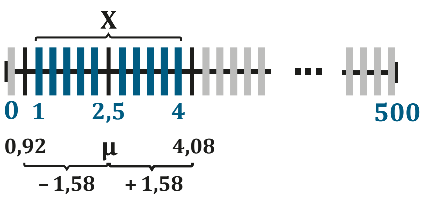
$\boxed{\mu = E(X) = n \cdot p}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0{,}005 \cdot 0{,}995} \approx 1{,}58$

$\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Teil 2: Wahrscheinlichkeit, dass X im σ-Intervall liegt

Schritt 1: Bereich aufstellen



$P_{0{,}005}^{500}(0{,}92 \leq X \leq 4{,}08) =$

zu 1 aufrunden

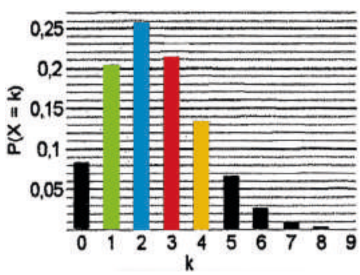
zu 4 abrunden

$= P_{0{,}005}^{500}(1 \leq X \leq 4)$

Immer zu **μ** hin runden.
X ist ganzzahlig!

Schritt 2: Wahrscheinlichkeit mithilfe des Diagramms bestimmen

$$\begin{aligned} P_{0{,}005}^{500}(1 \leq X \leq 4) &= P_{0{,}005}^{500}(X=1) \\ &\quad + P_{0{,}005}^{500}(X=2) \\ &\quad + P_{0{,}005}^{500}(X=3) \\ &\quad + P_{0{,}005}^{500}(X=4) \\ &\approx 0{,}2 + 0{,}26 \\ &\quad + 0{,}21 + 0{,}13 \\ &= 0{,}8 = 80\,\% \end{aligned}$$



Analysis Allgemeines Gymnasium Baden-Württemberg

Musterabitur - Plichtteil

Lösungen Analysis

1 Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x)=3x\cdot\cos(x^2+1)$.

Die Funktion f lässt sich mithilfe der Produktregel ableiten. Für die Ableitung des Faktors $\cos(x^2+1)$ wird zudem die Kettenregel benötigt.

Produktregel
$f(x)=u(x)\cdot v(x)$
$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$f(x)=3x\cdot\cos(x^2+1)$

$$f'(x)=\underbrace{3\cdot\cos(x^2+1)+3x\cdot\underbrace{(-\sin(x^2+1))\cdot 2x}_{\text{Kettenregel}}}_{\text{Produktregel}}$$

Kettenregel
$u(v(x))'=u'(v(x))\cdot v'(x)$

$$=3\cdot\cos(x^2+1)-6x^2\cdot\sin(x^2+1)$$

2 Berechnen Sie das Integral $\int_2^5\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

Um entsprechend dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI) eine Stammfunktion des Integranden $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ bestimmen zu können, wird der Integrand zunächst in der Potenzschreibweise formuliert.

$$\int_2^5\frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int_2^5(x-1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot(x-1)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_2^5$$
$$=\left[\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]_2^5$$
$$=[2\cdot\sqrt{x-1}]_2^5$$
$$=2\cdot[\sqrt{x-1}]_2^5$$
$$=2\cdot(\sqrt{5-1}-\sqrt{2-1})$$
$$=2\cdot(2-1)$$
$$=2$$

$\frac{1}{x}=x^{-1}$; $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

HDI
$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b$$
$$=F(b)-F(a)$$

$\int x^r\,dx=\frac{x^{r+1}}{r+1}+c$

b) Berechnung des Abstands von g und E

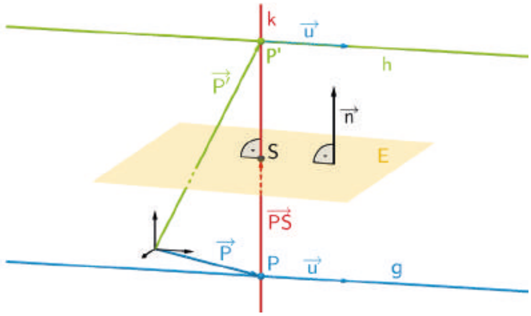
Es wird der Abstand zwischen dem Aufpunkt (-2 | 4 | 4) der Geraden g und der Ebenen E berechnet.
Somit folgt:

Abstand Punkt - Ebene

$$d(P;E)=\left|\frac{n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3+n_0}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right|$$

$$d(g;E)=\left|\frac{2\cdot(-2)-4+2\cdot4-9}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}\right|=\left|\frac{-9}{\sqrt{9}}\right|=\frac{9}{3}=3$$

c) Bestimmung einer Gleichung der Geraden h



Da die Gerade g parallel zur Ebene E verläuft, ist der Richtungsvektor $\vec{u}$ von der Geraden g ebenfalls ein Richtungsvektor von der Geraden h, welche durch Spiegelung von g an der Ebene E entsteht.
Die Spiegelung des Aufpunkts P(-2 | 4 | 4) der Geraden g an der Ebene E liefert einen Aufpunkt P* der Geraden h.

1. Schritt: Hilfsgerade (Lotgerade) k durch P und senkrecht zu E

Der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E ist ein Richtungsvektor von k.

$$k: \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+2r\\4-r\\4+2r\end{pmatrix};\ r\in\mathbb{R}$$

2. Schritt: Ortsvektor des Schnittpunkts S von k und E ermitteln

Hierfür werden die Koordinaten von k in die Gleichung der Ebene E eingesetzt und diese nach dem Parameter r aufgelöst.

$$\begin{aligned}k\cap E: 2\cdot(-2+2r)-(4-r)+2\cdot(4+2r)&=9\\ -4+4r-4+r+8+4r&=9\\ 9r&=9\quad |:9\\ r&=1\end{aligned}$$

Teil 3: Untersuchung von f auf Monotonie

Monotonie

1. f′(x) berechnen

2. Gilt bei x_0 $f'(x_0) > 0$ so ist G_f bei x_0 **s**treng **m**onoton **s**teigend ↗

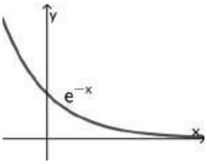
   $f'(x_0) < 0$ so ist G_f bei x_0 **s**treng **m**onoton **f**allend ↘

Die Ableitungsfunktion f'(x) lässt sich mithilfe der Kettenregel bilden.

$$f(x) = 6 - 2e^{-x}$$
$$f'(x) = 0 - 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 2e^{-x}$$

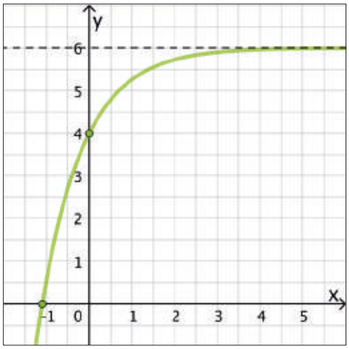
Kettenregel
$u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Es gilt: $f'(x) = 2e^{-x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Somit ist f streng monoton steigend.



Teil 4: Skizze von K

Mithilfe der bereits bekannten Ergebnisse $S_x(-\ln 3 \mid 0)$, $S_y(0 \mid 4)$ sowie der Asymptote mit der Gleichung y = 6 lässt sich der Graph K von f hinreichend genau skizzieren.

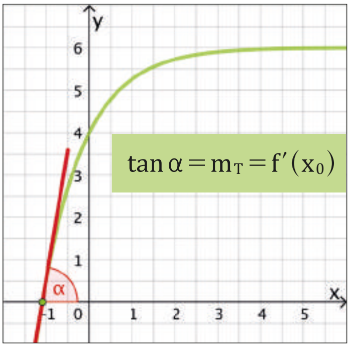


Teil 5: Weite des Winkels unter dem K die x-Achse schneidet

Gesucht ist die Größe des Steigungswinkels α der Tangente an K im Punkt $S_x(-\ln 3 \mid 0)$.

$$f'(-\ln 3) = 2 \cdot e^{-(-\ln 3)}$$
$$= 2 \cdot e^{\ln 3} \qquad |e^{\ln b} = b$$
$$= 2 \cdot 3 = 6$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = 6 \quad |\text{TR}: \tan^{-1}(6)$$
$$\Rightarrow \alpha \approx 80{,}5°$$

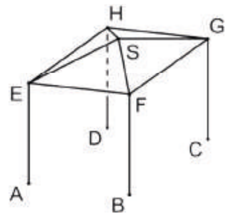


Geometrie Allg. Gymnasium Baden-Württemberg

Musterabitur - Wahlteil

Lösungen Geometrie 1

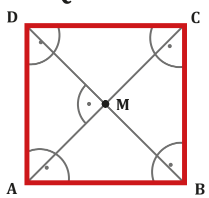
Gegebene Endpunkte der 4,50 m langen vertikalen Pfosten des Turms:
A(2 | -3 | -0,5), D(-3 | -2 | -0,5), E(2 | -3 | 4), F(3 | 2 | 4), G(-2 | 3 | 4), H(-3 | -2 | 4)
Dachspitze: S(0 | 0 | 5)
Die x_1x_2-Ebene beschreibt den Untergrund.
1 LE im Koordinatensystem entspricht 1 m.



a) Weisen Sie nach, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist.
Die Punkte E, F und S liegen in einer Ebene L.
Bestimmen Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform.

Teil 1: Nachweis, dass das Viereck EFGH ein Quadrat ist

Quadrat



Kochrezept für Quadratnachweis
Entweder: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{DA}\right|$ und $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$
Oder: $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D}$ und $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ und $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right|$

1. Möglichkeit:

Es werden zunächst die vier Verbindungsvektoren $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{EH}$ bestimmt.

Verbindungsvektor
$\overrightarrow{AB} = \vec{B} - \vec{A}$
„Spitze minus Fuß“

$$\overrightarrow{EF} = \vec{F} - \vec{E} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{HG} = \vec{G} - \vec{H} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{FG} = \vec{G} - \vec{F} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{EH} = \vec{H} - \vec{E} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

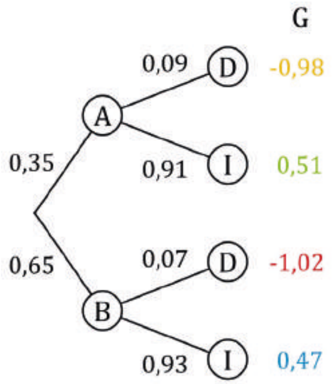
Wegen $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ und $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ ist das Viereck EFGH ein Parallelogramm.

c) Ein Discounter bezieht 35 % der von ihm angebotenen Lampen von der Firma A und 65 % von der Firma B. Der Einkaufspreis beträgt 0,98 Euro für eine Lampe der Firma A und 1,02 Euro für eine Lampe der Firma B. Im Zusammenhang mit dem Einkauf findet keine Prüfung der Lampen statt. Für Kunden des Discounters sind die Lampen der beiden Firmen nicht unterscheidbar; der Verkaufspreis beträgt unabhängig vom Hersteller 1,49 Euro. Jede von einem Kunden ausgewählte Lampe wird an der Kasse geprüft: Ist eine Lampe defekt, so wird sie entsorgt.
Bestimmen Sie den im Mittel pro Lampe zu erwartenden Gewinn des Discounters.

Die Zufallsgröße G beschreibe den Gewinn des Discounters pro Lampe in Euro.

Ist eine Lampe intakt (I), so ist der Gewinn des Discounters bei einer Lampe
von der Firma A: 1,49 € - 0,98 € = 0,51 €;
von der Firma B: 1,49 € - 1,02 € = 0,47 €.

Ist eine Lampe defekt (D), so verzeichnet der Händler einen Verlust in Höhe des Einkaufpreises von 0,98 € bzw. 1,02 €.



Mithilfe der 1. Pfadregel ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariable G:

1. Pfadregel: „Werte entlang eines Pfades werden multipliziert."
$P(A \cap D) = P(A) \cdot P_A(D)$

$G = g_i$	-0.98	0,51	-1,02	0,47
$P(G = g_i)$	$0{,}35 \cdot 0{,}09$ $= 0{,}0315$	$0{,}035 \cdot 0{,}91$ $= 0{,}3185$	$0{,}65 \cdot 0{,}07$ $= 0{,}0455$	$0{,}65 \cdot 0{,}93$ $= 0{,}6045$

Für den Erwartungswert von G gilt:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

$$E(G) = -0{,}98 \cdot 0{,}0315 + 0{,}51 \cdot 0{,}3185 + (-1{,}02) \cdot 0{,}0455 + 0{,}47 \cdot 0{,}6045$$
$$\approx 0{,}37$$

Der Discounter kann im Mittel einen Gewinn von etwa 0,37 € pro Lampe erwarten.