www.deinabitur.de

Kursübersicht:
www.deinabitur.de

Dein Kursbuch Mathematik

Liebe zukünftige Abiturientin, lieber zukünftiger Abiturient,

dieses Buch soll Dir die Vorbereitung auf das Mathematik Abitur so einfach wie möglich machen. Dazu wurde der Stoff für Dich zusammengefasst und die häufigsten Aufgabentypen, die jedes Jahr im Abitur drankommen, übersichtlich dargestellt. Bei möglichst vielen Standardaufgaben wurden Kochrezepte herausgearbeitet um Dir zu zeigen, wie man diese Aufgabentypen lösen kann.

Je nach mathematischem Teilgebiet (**Analysis**, **Stochastik** und **Geometrie**) sieht ein Kochrezept in unserem Buch zum Beispiel so aus:

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Tiefpunkt (Minimum).

positiv
⇨ TP

Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
⇨ G_f hat bei $x = x_0$ einen Hochpunkt (Maximum).

negativ
⇨ HP

Neben einem Kochrezept sind auf dem Rand Verweise zu passenden Abituraufgaben zu dem jeweiligen Aufgabentyp abgebildet.
Die Aufgaben sind aus den Abituraufgaben von Bayern und Baden-Württemberg (allgemeinbildendes- und berufliches Gymnasium) entnommen. Die Seitenzahlen beziehen sich dabei auf die ergänzenden Abibücher aus Bayern (mit BY gekennzeichnet) und Baden-Württemberg (mit BW gekennzeichnet).
Wegen der länderübergreifenden Aufgaben werden teilweise die identischen Aufgaben in beiden Bundesländern im Abitur verwendet. Auch lassen sich Lehrer gerne beim Erstellen von Abituraufgaben von anderen Bundesländern inspirieren. Deshalb empfehlen wir gut ausgewählte Abituraufgaben aus beiden Bundesländern für die Vorbereitung auf das jeweilige eigene Abitur zu rechnen.
Für bestimmte Schularten nicht relevante Stoffgebiete (zum Beispiel die gebrochenrationalen Funktionen für das berufliche Gymnasium in Baden-Württemberg) sind extra gekennzeichnet.

Das Team von deinabitur wünscht Dir viel Erfolg in Deinem Abitur!

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Einwilligung der DeinErfolg UG & Co. KG, Kellerbergstrasse 17, 89362 Offingen

Autor: Martin Weckerle, 86159 Augsburg
Druck: KRAUS druck & medien GmbH, 86316 Friedberg
Illustration Comics: Sebastian Eccius, 86368 Gersthofen

Inhaltsverzeichnis Analysis

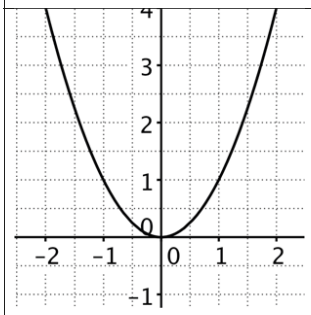
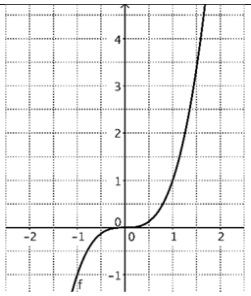
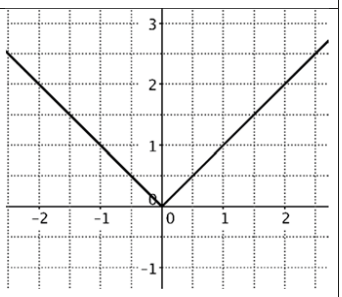
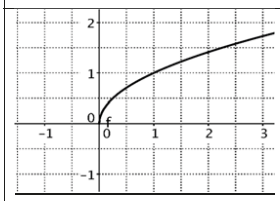
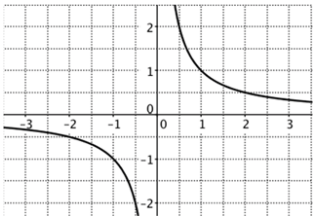
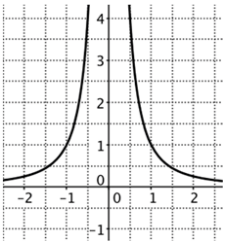
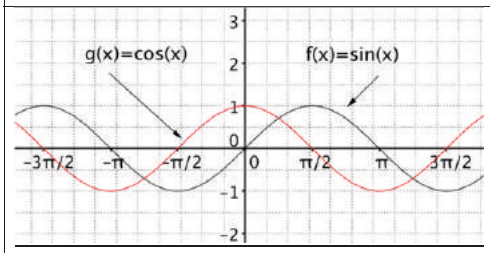
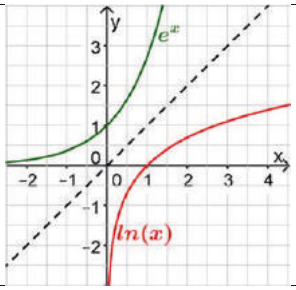
1 Umgang mit den wichtigsten Funktionsgraphen 4
1.1 Überblick über die für das Abitur relevanten Funktionstypen 5
1.2 Die Graphen verschieben, spiegeln und strecken 7
2 Lösen von Gleichungen 10
2.1 Nullstellen bei ganz-rationalen Funktionen 10
2.2 Nullstellen bei gebrochen-rationalen Funktionen 13
2.3 Nullstellen bei e-Funktion und ln-Funktion 14
2.4 Nullstellen von Wurzelfunktionen 15
2.5 Nullstellen von trigometrischen Funktionen 16
3 Differentialrechnung 17
3.1 Ableitung und Stammfunktion berechnen 17
3.2 Ableitungsregeln 18
3.3 Typische Fragestellungen zur Ableitung 22
3.3.1 Steigung des Graphen an einem Punkt berechnen 22
3.3.2 Normalengleichung zu einer bereits berechneten Tangente angeben 23
3.3.3 Berechnung des Steigungswinkels 23
3.3.4 Die Steigung an einem Punkt graphisch ermitteln 23
3.3.5 Die mittlere Steigung zwischen zwei Punkten ermitteln 23
4 Kurvendiskusion 24
4.1 Definitionsbereich 24
4.1.1 Ganz-rationale Funktionen: 24
4.1.2 Gebrochen- rationale Funktionen (Nicht für berufliches Gym. BW relevant) 24
4.1.3 e-Funktionen: 24
4.1.4 ln – Funktion: 24
4.1.5 Wurzel Funktion: 24
4.1.6 Trigonometrische Funktion: 24
4.2 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen 25
4.3 Symmetrie 26
4.3.1 Ganz-rationale Funktionen: 27
4.3.2 Gebrochen- rationale Funktionen (Nicht für berufliches Gym. BW relevant) 27
4.3.2 Exponential- ln- und Wurzelfunktion 27
4.3.3 Trigonometrische Funktionen: 27
4.4 Verhalten an den Rändern des Definitionsbereichs 28
4.4.1 Verhalten für $x \to \pm\infty$ 28
4.4.1.1 Ganz-rationale Funktionen 28
4.4.1.2 Gebrochen- rationale Funktionen (Nicht für berufliches Gym. BW relevant) 28
4.4.1.3 e/ln-Funktionen 28
4.4.2 Verhalten an den Definitionslücken (Nicht für berufliches Gym. BW relevant) 31
4.5 Monotonieverhalten und Extrempunkte 33
4.6 Krümmung und Wendepunkt 36

4.7 Graphen zeichnen 38
4.8 Beispiele von kompletten Kurvendiskussionen 40
5 Integralrechnung 46
5.1 Das Integral als Flächenbilanz 46
5.2 Berechnung von Flächen 46
5.3 Übersicht über die für das Abitur relevanten Typen von Stammfunktionen 49
5.4 Vorzeichen von bestimmten Integralen 51
5.5 Fläche zwischen Funktionsgraph und x-Achse 51
5.6 Fläche zwischen zwei Graphen 53
5.7 Grafischer Zusammenhang zwischen F, f, f´und f´´ 54
5.8 Anwendungsaufgaben zur Gesamtänderung 57
5.9 Integralfunktion (Nur für Bayern relevant) 58
5.10 Uneigentliche Integrale (Flächen, die ins Unendliche reichen) 61
5.11 Aufgabenübersicht Integralrechnung 62

6 Aufstellen eines Funktionsterms mit gewünschten Eigenschaften 63
6.1 Die Funktion soll eine vorgegebene n-fache Nullstelle besitzen 63
6.2 Die Funktion soll eine bestimmte Symmetrie aufweisen 63
6.3 Die Funktion soll an einer bestimmten Stelle nicht differenzierbar sein 63
6.4 Die Funktion soll durch einen bestimmten Punkt gehen 64
6.5 Die Funktion soll einen vorgegebenen Hochpunkt besitzen 64
6.6 Die Funktion soll einen vorgegebenen Tiefpunkt besitzen 64
6.7 Die Funktion soll einen vorgegebenen Terrassenpunkt besitzen 64
6.8 Die Funktion soll auf einem Intervall umkehrbar sein 65
6.9 Die Funktion soll einen vorgegebenen Definitionsbereich und Wertebereich besitzen 65
6.10 Aufstellen von ganz-rationalen Funktion 66
6.11 Aufstellen von gebrochen-rationalen Funktionen 68
7 Umkehrfunktionen 70
7.1 Umkehrfunktion zeichnen 71
7.2 Definitionsbereich und Wertebereich der Umkehrfunktion ermitteln 71
7.3 Überprüfen, ob eine Funktion umkehrbar ist 71
7.4 Berechnung des Terms der Umkehrfunktion 73
8 Wachstums- und Zerfallsaufgaben 74
9 Extremwertaufgaben 75
10 Newton Verfahren (Nur Bayern) 76

1 Umgang mit den wichtigsten Funktionsgraphen

Folgende Funktionsgraphen sollte man im Kopf haben

$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = \lvert x \rvert$
		
$f(x) = \sqrt{x}$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
		
$f(x) = \sin x \quad g(x) = \cos x$		$f(x) = e^x \quad \lvert \quad f(x) = \ln(x)$
		
$\pi = 3{,}14 \ldots$		$e = 2{,}718 \ldots$

2.3 Nullstellen bei e-Funktion und ln-Funktion

e und ln sind Umkehrfunktionen:
$e^{\ln(x)} = x$ $\quad \ln(e^x) = x$ $\quad \ln(e) = 1$

Verschiedene typische Aufgaben:

BW S.99 A.3

Bsp. 1:

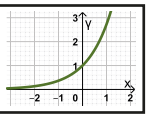
$f(x) = (2x - 1) \cdot e^{2x} = 0$

$2x - 1 = 0 \quad > 0$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2}$

$N(\frac{1}{2} \mid 0)$

Satz vom Nullprodukt

e^x ist immer > 0



BY S. 8 2a

Bsp. 2:

① $f(x) = e^{3x} - 7 = 0$ $\quad | +7$
② $e^{3x} = 7$ $\quad | \ln(...)$
③ $\ln(e^{3x}) = \ln(7)$
$3x = \ln(7)$ $\quad | : 3$
$x = \frac{\ln(7)}{3}$
$N = (\frac{\ln(7)}{3} \mid 0)$

① „e“ isolieren
② ln anwenden
③ ln-Gesetz

Bsp. 3:

$f(x) = (3x^2 - 9) \cdot (4e^{3x-1} - 3) = 0$ $\quad$ Satz vom Nullprodukt

$3x^2 - 9 = 0 \quad | + 9$
$3x^2 = 9 \quad | : 3$
$x^2 = 3 \quad | \sqrt{...}$
$x_{1/2} = \pm \sqrt{3}$
$N_1(\sqrt{3} \mid 0), N_2(-\sqrt{3} \mid 0)$

$4e^{3x-1} - 3 = 0 \quad | + 3$
$4e^{3x-1} = 3 \quad | : 4$
$e^{3x-1} = \frac{3}{4} \quad | \ln(...)$
$\ln(e^{3x-1}) = \ln(\frac{3}{4}) \quad |$ ln-Gesetz
$3x - 1 = \ln(\frac{3}{4}) \quad | + 1$
$3x = \ln(\frac{3}{4}) + 1 \quad | : 3$
$x = \frac{\ln(\frac{3}{4}) + 1}{3}$
$N_3(\frac{\ln(\frac{3}{4}) + 1}{3} \mid 0)$

Bsp. 4:

$f(x) = \frac{1}{2} e^x - e^{-x} = 0 \quad | + e^{-x}$
$\frac{1}{2} e^x = e^{-x} \quad | \ln(...)$
$\ln(\frac{1}{2} e^x) = \ln(e^{-x}) \quad |$ ln-Gesetze

$\ln(\frac{1}{2}) + \ln(e^x) = -x$

$\ln(1) - \ln(2) + x = -x \quad | -x$

$-2x = -\ln(2) \quad | : (-2)$

$x = \frac{\ln(x)}{2}$

$N(\frac{\ln(x)}{2} \mid 0)$

Bsp. 5:

① $e^{2x} + 3e^x = 4$ — ① Alles auf eine Seite bringen

② $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$ — ② Substitution: $e^x = u$

③ $u^2 + 3u - 4 = 0$ — ③ Mitternachtsformel

$D = 9 - 4 \cdot (-4) = 9 + 16 = 25$

$u_{1/2} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$

④ $u_1 = -\frac{8}{2} = -4 \quad u_2 = \frac{2}{2} = 1$ — ④ Rücksubstitution: löse $e^x = 4$

$e^x = u_1 = -4 \quad \rightarrow$ keine Lösung

$e^x = u_2 = 1 \quad \rightarrow e^x = 1 \quad | \ln(...)$

$x = \ln 1$

⑤ $N(\ln(1) \mid 0)$ — ⑤ Nullstelle angeben

Bsp. 6: $\ln(x^2 - 1) - 5 = 0 \quad | +5$

$\ln(x^2 - 1) = 5 \quad | \cdot e^{\text{"hoch'}}$ — ① e-Funktion auf beiden Seiten anwenden

$e^{(\ln(x^2-1))} = e^5 \quad |$ — ② e und ln heben sich gegenseitig auf

$x^2 - 1 = e^5 \quad | +1$

$x^2 = e^5 + 1 \quad | \sqrt{}$

$x_1 = -\sqrt{e^5 + 1} \qquad x_2 = \sqrt{e^5 + 1}$

$N_1(-\sqrt{e^5 + 1} \mid 0) \qquad N_2(\sqrt{e^5 + 1} \mid 0)$

BY S. 37 d

2.4 Nullstellen von Wurzelfunktionen

2.2.1.4 <u>Wurzel – Funktion:</u>

Bsp: $f(x) = \sqrt{x - 5} - 3$

$0 = \sqrt{x - 5} - 3 \quad | +3$ (1. Schritt: „Wurzel“ isolieren)

$3 = \sqrt{x - 5} \quad | \ ^2$ (2. Schritt: Quadrieren)

$9 = x - 5 \quad | +5$

$x = 14$

$N(14 \mid 0)$

BY S. 278 1a

3 Differentialrechnung
3.1 Ableitung und Stammfunktion berechnen

$f(x) = x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad$ mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = a \cdot x^n$ $\quad n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$

$f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1}$

$F(x) = a \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\quad$ mit $C \in \mathbb{R}$

Ein konstanter Faktor (hier „a“) wird „mitmultipliziert“.

Zu einer Funktion f(x) gibt es immer unendlich viele Stammfunktionen F(x), da zu einer bestehenden Stammfunktion immer eine beliebige Zahl $C \in \mathbb{R}$ addiert werden kann, die beim Ableiten wegfällt! (C'=0)

$f(x) = 5x^7$

Im Beispiel ist der konstante Faktor $a = 5$ und der Exponent $n = 7$.

$f'x = 7 \cdot 5x^6 = 35x^6$

! Kontrolle: F'(x) = f(x)

$F(x) = 5 \cdot \frac{x^8}{8} = \frac{5}{8}x^8$

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1}$

Trick:
Als Potenzfunktion schreiben

ableiten

$F(x) = -\cos(x)$

$f(x) = \sin(x)$

$f'(x) = \cos(x)$

„aufleiten“

Die Ableitungen und Stammfunktionen folgender Grundfunktionen sollte man auswendig können:

F(x)	**f(x)**	f'(x)
ax	**a**	0
$\frac{1}{2}ax^2$	**ax**	a
$\frac{1}{3}x^3$	**x^2**	$2x$
$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$	**$\sqrt{x}$**	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$-\cos(x)$	**sin(x)**	$\cos(x)$
$\sin(x)$	**cos(x)**	$-\sin(x)$
e^x	**e^x**	e^x
$\ln(x)$	**$\frac{1}{x}$**	$-\frac{1}{x^2}$
$x \cdot \ln(x) - x$	**ln(x)**	$\frac{1}{x}$

● Ableitung von ln nicht für BW-beruflich

Kettenregel

$f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Anzuwenden bei Funktionen, die in eine andere Funktion eingesetzt ist: z.B. $f(x) = \sin(x^3)$.

- $u(x) = \sin(x)$ nennt man die äußere Funktion und
- $u'(x) = \cos(x)$ die äußere Ableitung.
- $v(x) = x^3$ nennt man die innere Funktion und
- $v'(x) = 3x^2$ die innere Ableitung.

Zusammengesetzt: $f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

Vorgehen:
1. Leite die äußere Funktion ab und lasse die innere **unangetastet**!
2. Multipliziere mit der Ableitung der inneren Funktion! (Nachdifferenzieren)

Es gibt nur fünf verschiedene Fälle in denen die Kettenregel im Abitur anzuwenden ist. Bei diesen Fällen muss gegebenenfalls durch „rückwärts-Anwenden" der Kettenregel auch eine Stammfunktion angegeben werden:

Fall 1: Verkettete Potenzfunktion, Typ $(...)^n$

$[(v(x))^n]' = n \cdot [v(x)]^{n-1} \cdot v'(x)$

$f(x) = 4 \cdot (3x^4 - 2x^2 + 4x + 3)^6$

Äußere Funktion: $u(x) = 4 \cdot (....)^6$ ⇨ äußere Ableitung: $u'(x) = 4 \cdot 6 \cdot (....)^5$
Innere Funktion: $v(x) = 3x^4 - 2x^2 + 4x + 3$ ⇨ innere Ableitung: $v'(x) = 12x^3 - 2x + 4$

Bei diesem Typ ist immer die Klammer die innere Funktion!

$f'(x) = 24 \cdot \underbrace{(3x^4 - 2x^2 + 4x + 3)^5}_{v(x)} \cdot \underbrace{(12x^3 - 2x + 4)}_{v'(x)}$

Fall 2: Verkettete Sinus- oder Cosinusfunktion, Typ sin(...)

$[\sin(v(x))]' = \cos(v(x)) \cdot v'(x)$

$[\cos(v(x))]' = -\sin(v(x)) \cdot v'(x)$

$f(x) = \sin(3x^4 - 3x)$

$f'(x) = \cos(3x^4 - 3x) \cdot (12x^3 - 3)$

$f(x) = \cos(5x^3 - 3x^2)$

$f'(x) = -\sin(5x^3 - 3x^2) \cdot (15x^2 - 6x)$

Fall 3: Verkettete Wurzelfunktion, Typ $\sqrt{...}$

$$[\sqrt{v(x)}]' = \frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x)}}$$

$f(x) = \sqrt{3x^2 - 7}$ ⇨ $v(x) = 3x^2 - 7x$
⇨ $v'(x) = 6x - 7$

Zusammengesetzt: $f'(x) = \frac{6x - 7}{2\sqrt{(3x^2 - 7x)}}$

Trick:
1. Bruchstrich ziehen.
2. Im Nenner steht 2 mal die Wurzel.
3. Im Zähler steht die Ableitung der inneren Funktion.

Fall 4: Verkettete e-Funktion,Typ $e^{...}$

$$[e^{v(x)}]' = e^{v(x)} \cdot v(x)'$$

$f(x) = e^{x^2}$ ⇨ $v(x) = x^2$
⇨ $v'(x) = 2x$

Zusammengesetzt: $f(x) = e^{x^2} \cdot 2x = 2x \cdot e^{x^2}$

Trick:
1. „e-Funktion“ unverändert abschreiben.
2. Mit der Ableitung des Exponenten multiplizieren.

Fall 5: Verkettete ln-Funktion, Typ ln (...)

$$[\ln(v(x))]' = \frac{v(x)'}{v(x)}$$

$f(x) = \ln(3x^4 - 5x^2)$ ⇨ $v(x) = 3x^4 - 5x^2$
⇨ $v'(x) = 12x^3 - 10x$

Zusammengesetzt: $f'(x) = \frac{12x^3 - 10x}{3x^4 - 5x^2}$

Trick:
1. Bruchstrich ziehen.
2. Im Nenner steht die Klammer hinter dem „ln“.
3. Im Zähler steht die Ableitung des Nenners.

Aufgaben zum Ableiten aus dem Abitur

Bilden Sie jeweils den Term der ersten Ableitung von:

1. Ganz-rational: $f(x)=0{,}5\cdot x^4+x^3+1;\ x\in\mathbb{R}$ (Bitte auch 2. Ableitung!)
2. Wurzel: $f: x\mapsto \sqrt{3x-5}$
3. e-Funktion: $f(x)=6-2e^{-x}$
4. Sinusfunktion: $f(x)=3x\cdot\cos(x^2+1)$
5. ln-Funktion: $f(x)=2\cdot((\ln x)^2-1)$ (Bitte auch 2. Ableitung!)

Lösung

1. $f'(x)=2x^3+3x^2$
$f''(x)=6x^2+6x$
$f'''(x)=12x+6$

Ableitung einer Potenzfunktion
$f(x)=x^r \Rightarrow f'(x)=r\cdot x^{r-1}$

2. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{3x-5}}\cdot 3=\frac{3}{2\sqrt{3x-5}}$

$[\sqrt{v(x)}]'=\frac{v'(x)}{2\sqrt{v(x}}$

3. $f(x)=6-2e^{-x}$
$f'(x)=0-2\cdot e^{-x}\cdot(-1)=2e^{-x}$

Kettenregel
$u(v(x))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$

4.
Die Funktion f lässt sich mithilfe der Produktregel ableiten. Für die Ableitung des Faktors $\cos(x^2+1)$ wird zudem die Kettenregel benötigt.

Produktregel
$f(x)=u(x)\cdot v(x)$
$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$f(x)=3x\cdot\cos(x^2+1)$
$f'(x)=\underbrace{3\cdot\cos(x^2+1)+3x\cdot\underbrace{(-\sin(x^2+1))\cdot 2x}_{\text{Kettenregel}}}_{\text{Produktregel}}$
$=3\cdot\cos(x^2+1)-6x^2\cdot\sin(x^2+1)$

Kettenregel
$u(v(x))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$

5. $f(x)=2\cdot((\ln x)^2-1)$
$=2\cdot(\ln x)^2-2$

$f'(x)=2\cdot 2(\ln x)^1\cdot\frac{1}{x}-0$
$=4\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}$
$=\frac{4}{x}\cdot\ln x$

Kettenregel
$u(v(x))' = u'(v(x))\cdot v'(x)$

$f''(x)=\frac{4}{x}\cdot\ln x=4\cdot\frac{\ln x}{x}$

$f''(x)=4\cdot\left(\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}\right)$
$=4\cdot\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$
$=\frac{4}{x^2}\cdot(1-\ln x)$

Quotientenregel:
$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$
$f'(x)=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2}$

3.3 Typische Fragestellungen zur Ableitung

3.3.1 Steigung des Graphen an einem Punkt berechnen

BY S.172 Aufgabe 4 (Aufgabe mit Parameter)

„Gegeben ist die Funktion f(x). Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f(x) an der Stelle x=x_0."

Lösung:

1. $f'(x)$ berechnen
2. x_0 *in* $f'(x)$ einsetzten: $f'(x_0)$
3. Der berechnete Wert $f'(x_0)$ gibt die Steigung des Graphen von $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ an.

Typische Erweiterung: „Stellen Sie die Tangentengleichung an der Stelle x=x_0 auf."

1. Grundgleichung der Gerade: $y = mx + t$
2. f'(x) berechnen
3. x_0 in f'(x) einsetzten: ⇒ Steigung: $m = f'(x_0)$
4. Den ganzen Punkt berechnet man, indem man x_0 in f(x) einsetzt: y_0= f(x_0) ⇒ P(x_0 | y_0)
5. Mit dem Punkt P(x_0 | y_0) kann man t bestimmen, indem man das berechnete m, x_0 und y_0 in die Geradengleichung einsetzt und nach t auflöst.
6. Alle berechneten Werte in die Geradengleichung: y=mx+t einsetzen.

Tangente an ganz-rationaler Funktion
BY S.279 3a
BW S. 13 1.1.2

e-Funktion
BY S.122 1e

ln Funktion
BY S.36 1a
BY S.173 1b

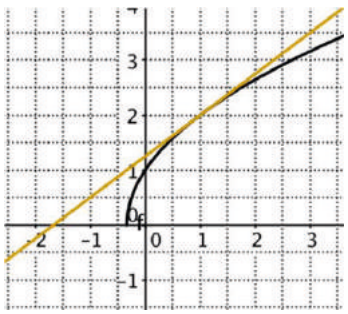
Bsp.: *Gegeben ist die Funktion* $f(x) = \sqrt{3x+1}$. *Stellen Sie die Tangentengleichung an der Stelle x=1 auf.*

1. y=m·x+t
2. $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$
3. $f'(1) = \frac{3}{2\sqrt{3\cdot 1+1}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4}$
4. $f(1) = \sqrt{3\cdot 1+1} = \sqrt{4} = 2 \quad P(1|2)$
5. $y_0 = m \cdot x_0 + t$

   $2 = \frac{3}{4}\cdot 1 + t$

   $2 = \frac{3}{4} + t \quad | -\frac{3}{4}$

   $\frac{5}{4} = t$
6. $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$



3.3.2 Normalengleichung zu einer bereits berechneten Tangente angeben

„Stellen Sie die Normalengleichung an der Stelle x=x_0 auf:“

Lösung: Gleiches Vorgehen wie bei der Tangente mit $m_{normale}= \frac{-1}{m_{tangente}}$

Normale:
BW S.13 A.1.2

3.3.3 Berechnung des Steigungswinkels

Die Steigung an einer Stelle x_0 ist bekannt und es soll der Steigungswinkel α berechnet werden:

Lösung: $f'(x_0)= \tan\alpha \Rightarrow \quad \tan^{-1}(f'(x_0)) = \alpha$

Winkel mit:

ln-Funktion
BY S.36 1a

e-Funktion
BW S.99
A.1.1 a

3.3.4 Die Steigung an einem Punkt graphisch ermitteln

Typische Aufgabenstellung: *„Ermitteln Sie graphisch die Steigung an einem Punkt.“*

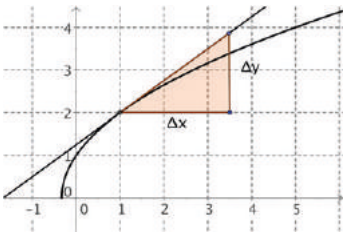
Dies entspricht der momentanen Änderungsrate oder dem Differentialquotienten bzw. der ersten Ableitung! (=Tangentensteigung)

BY S.38 2b

BW S.101
A 2.1 a
(momentane Änderungs-rate)

Lösung:

1. Am Punkt eine Tangente mit dem Geodreieck einzeichnen
2. Steigungsdreieck einzeichnen
3. $f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$



Anwendung:

1. Graphisches Differenzieren:

„Konstruieren sie aus dem Grafen f(x) den Grafen f'(x).“

2. In Anwendungsaufgaben die Momentane Änderungsrate an einem Punkt durch Messen ermitteln und interpretieren.

3.3.5 Die mittlere Steigung zwischen zwei Punkten ermitteln

Typische Aufgabenstellung 2.: (Differenzenquotient)**:** *„Berechnen sie die mittlere Steigung (Änderung) zwischen zwei Punkten“.*

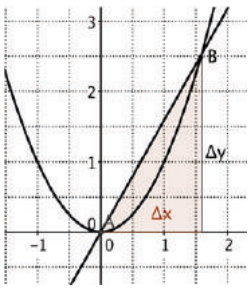
Dies entspricht der mittleren Änderungsrate oder dem Differenzenquotienten (=Sekantensteigung)

BY S.8 A.4

BW S.45
A. 1.1 (2)

Lösung:

1. Sekante zwischen 2 Punkten einzeichnen
2. Steigungsdreieck einzeichnen
3. $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$



Anwendung:

- Die Steigung der Sekante messen
- In Anwendungsaufgaben die durchschnittliche Änderungsrate ermitteln und interpretieren.

Lösung

Erster Schritt f´(x) berechnen

$f(x) = 2e^{-x} \cdot (2e^{-x} - 1)$ | „ausmultiplizieren“

$f(x) = 4e^{-2x} - 2e^{-x}$

$f'(x) = 4e^{-2x} \cdot (-2) - 2 \cdot e^{-x} \cdot (-1)$

$= -8e^{-2x} + 2e^{-x}$ | Reihenfolge tauschen um auf die gewünschte Lösung zu kommen

$= 2e^{-x} - 8e^{-2x}$ | $2e^{-x}$ ausklammern

$= 2e^{-x}(1 - 4e^{-x})$

1. Potenzgesetz
$e^x \cdot e^x = e^{2x}$

Zweiter Schritt f´(x)=0 berechnen

$f'(x) = 0$

$\underbrace{2e^{-x}}_{>0}(1 - 4e^{-x}) = 0$

$1 - 4e^{-x} = 0$ | $+ 4e^{-x}$

$1 = 4e^{-x}$ | $: 4$

$\frac{1}{4} = e^{-x}$ | $\ln(\,)$

$\ln\frac{1}{4} = -x$ | $\cdot(-1)$

$-\ln\frac{1}{4} = x = \ln 4$

Dritter Schritt Monotonietabelle erstellen

x	$-\infty < x < \ln 4$	$\ln 4$	$\ln 4 < x < \infty$
$f'(x)$	–	0	+
G_f	↘	TP	↗

z.B x = 0: $f'(x) = \underbrace{2e^{-x}}_{+}\underbrace{(1 - 4e^{-x})}_{-}$

$f'(0) = \underbrace{+ \cdot -}_{-}$

$f'(0) = 2(1 - 4) = -6$

z.B. x = 10: $f'(x) = \underbrace{2e^{-x}}_{+}\underbrace{(1 - 4e^{-x})}_{+}$

$f'(10) = \underbrace{+ \cdot +}_{+}$

$f'(10) = 2e^{-10}(1 - 4e^{-10}) > 0$

⇨ x = ln 4 ist die Stelle des Tiefpunkts

Vierter Schritt Y-Wert berechnen

$f(\ln 4) = 2e^{-\ln 4} \cdot (2e^{-\ln 4} - 1) = -\frac{1}{4}$

$e^{\ln x} = x$

$e^{-\ln x} = e^{\ln(x^{-1})} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Nicht verwechseln!

$e^{-\ln x} \neq -x$!

Berechnung:

$f(\ln 4) = 2 \cdot e^{\ln 4^{-1}} \cdot (2 \cdot e^{\ln 4^{-1}} - 1)$

$= 2 \cdot 4^{-1} \cdot (2 \cdot 4^{-1} - 1)$

$= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot (2 \cdot \frac{1}{4} - 1)$

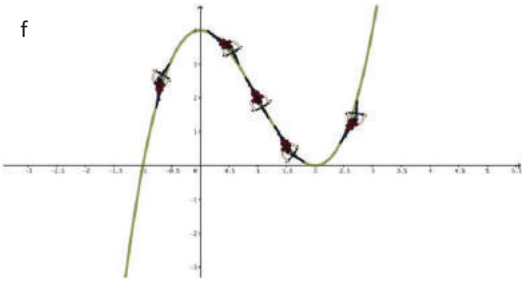
$= \frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$

⇨ TP $(\ln 4 \mid -\frac{1}{4})$

4.6 Krümmung und Wendepunkt

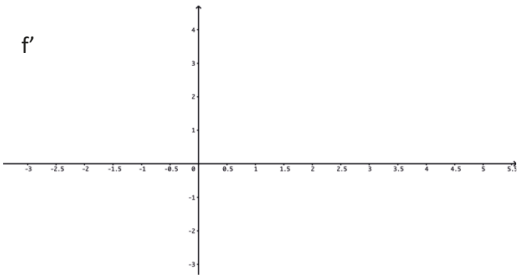
Aufgabenstellung:
Bestimme für die Funktion $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ jeweils f'(x) und f''(x) und zeichne deren Funktionsgraphen in die Koordinatensysteme ein!

f



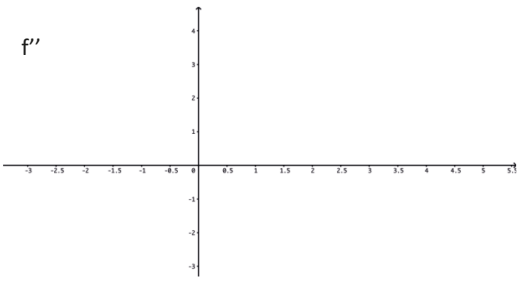
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

f'



$f'(x) =$

f''



$f''(x) =$

MERKE:

rechtsgekrümmt → f'' < 0 (negativ) ☹

linksgekrümmt → f'' > 0 (positiv) ☺

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	**Beispiele**	**Bemerkungen** Im Folgenden ist $C \in \mathbb{R}$ immer die Integrationskonstante.
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + C$ $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\int 2x^5 - \frac{1}{2}x^2 + 7\,dx = \frac{1}{3}x^6 - \frac{1}{6}x^3 + 7x + C$	Konstante Terme bekommen beim Integrieren immer ein x.
Lineare Substitution $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$	$\int sin(2x+3)\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3) + C$	$\int sin(x)\,dx = -cos(x) + C$
	$\int \cos(4x+3)\,dx = \frac{1}{4}\sin(4x+3) + C$	$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$
	$\int e^{5x+8}\,dx = \frac{1}{5}e^{5x+8} + C$	$\int e^x\,dx = e^x + C$
	$\int ln(ax+b)dx = \frac{1}{a}\left(-(ax+b) + (ax+b)ln(ax+b)\right) + C$	$\int ln(x)dx = -x + xln(x) + C$
	$\int \sqrt{2x+3}\,dx = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + C$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ und $\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$
$\int u'(x)e^{u(x)}\,dx = e^{u(x)} + C$	$\int (2x+5)e^{x^2+5x}\,dx = e^{x^2+5x} + C$	$u(x) = x^2 + 5x$ und $u'(x) = 2x + 5$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = ln\lvert u(x)\rvert + C$	$\int \frac{1}{x}dx = ln\lvert x\rvert + C$ $\int \frac{2x}{x^2-3}dx = ln\lvert x^2-3\rvert + C$	*„Integration für Kenner, wenn im Zähler die Ableitung vom Nenner!“*
Achtung	$\int \frac{x^2-3x+1}{x}dx = \int x - 3 + \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + 3x + ln\lvert x\rvert + C$	Erst den Bruch kürzen und dann jeden Summanden einzeln integrieren.

Stochastik

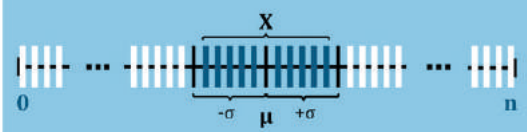
Inhaltsverzeichnis Stochastik

1 Wichtige Grundbegriffe 81
1.1 Ergebnisse und Ereignisse 81
1.2 Relative Häufigkeiten und Laplace- Wahrscheinlichkeiten 81
1.2.1 Relative Häufigkeiten 81
1.3 Baumdiagramm 82
2 Menge und Vierfeldertafel 84
2.1 Aufgaben zu Mengen für das Abitur 85
3 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit (Nicht BW Allg. Gym!) 86
3.1 Sprachliche Erkennung der bedingten Wahrscheinlichkeiten 89
3.2 Beispielaufgaben zur bedingten Wahrscheinlichkeit und stochastischen Unabhängigkeit 90
4 Zufallsvariablen einer Wahrscheinlichkeitsverteilung 92
4.1 Erwartungswert 92
4.2 Faires Spiel 92
4.3 Varianz und Standardabweichung 93
4.4 Histogramme 93
4.5 Beispielaufgaben 93
5 Kombinatorik 94
6 Binomialverteilung (Die Bernoulli-Kette) 97
6.1 Grundlagen 97
6.2 Beispielaufgabe zu Bernoulli Aufgabentyp „genau“ 97
6.3 Kumulative Wahrscheinlichkeiten 98
6.3.1 Beispielaufgaben zur kumulativen Wahrscheinlichkeit 98
6.3.2 Typ: „Weniger als“ 99
6.3.3 Typ: „mindestens“ 99
6.3.4 Typ: „mehr als“ 99
6.3.5 Typ: „mindestens, aber weniger als“ 99
6.3.6 Typ: „frühestens“ 100
6.3.7 Typ: „spätestens“ 100
6.3.8 Typ: „Bestimmte Zeitpunkte / genau dann...“ 100
6.3.9 Übungsaufgaben zur Bernoulli-Kette 101
6.4 Erwartungswert und Standardabweichung bei Bernoulli 102
6.5 Typische Abituraufgabentypen („3-mal mindestens“) 103
6.5.1 Mindestens ein Treffer 103
6.5.2 Abschätzung der Längen n 103
6.5.3 Abschätzung der Trefferwahrscheinlichkeit p 104

6.6 Original Abiaufgaben zur Bernoulli-Kette 105
7 Die hypergeometrische Verteilung 106
(nur für das Gymnasium in Bayern relevant)
8 Testen von Hypothesen (nicht für BW beruflich relevant) 107
8.1 Aufgabentyp: „Fehler 1. Art berechnen“: 108
8.2 Rechtsseitiger Test 109
8.3 Linksseitiger Test 110
8.4 Aufgabentyp: „Fehler 2. Art berechnen“ 111
8.5 Zusammenfassung Hypothesentest 111
9 Konfidenzintervalle (nur für berufliches Gymnasium BW) 114

6.4 Erwartungswert und Standardabweichung bei Bernoulli

Erwartungswert und Standardabweichung



$$P_p^n(\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma)$$

Aus Abi Bayern 2016 Stochastik B2 Aufgabe 2b

Nach einer aktuellen Erhebung leiden 25% der Einwohner Deutschlands an einer Allergie. Aus den Einwohnern Deutschlands werden n Personen zufällig ausgewählt.

Im Folgenden ist n = 200 . Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen unter den ausgewählten Personen, die an einer Allergie leiden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert der binomialverteilten Zufallsgröße X höchstens um eine Standardabweichung von ihrem Erwartungswert abweicht.

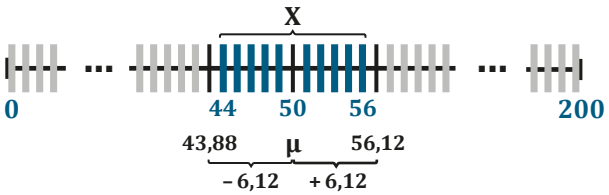
Lösung

Schritt 1: Erwartungswert und Standardabweichung bestimmen

Erwartungswert: $\mu = E(X) = 200 \cdot 0{,}25 = 50$ $\boxed{\mu = E(X) = n \cdot p}$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{200 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75} \approx 6{,}12$ $\boxed{\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$

Schritt 2: Bereich aufstellen



$$P_{0,25}^{200}(43{,}86 \le X \le 56{,}12) =$$

zu 44 aufrunden ↓ zu 56 abrunden

$$= P_{0,25}^{200}(44 \le X \le 56)$$

Immer zu **μ** hinrunden.
X ist ganzzahlig!

Schritt 3: Wahrscheinlichkeit berechnen

$$P_{0,25}^{200}(44 \le X \le 56) = P_{0,25}^{200}(X \le 56) - P_{0,25}^{200}(X \le 43)$$

TW oder TR

$$= 0{,}85546 - 0{,}14376 = 0{,}71170 \approx 71{,}2\,\%$$

6.5 Typische Abituraufgabentypen („3-mal mindestens“)

Typische Aufgabenstellung: Es wird gefragt, wie oft man ein Experiment **mindestens** wiederholen muss, um mit einer Wahrscheinlichkeit von **mindestens** 95% **mindestens einen Treffer** zu erreichen.

ACHTUNG: Dieser Aufgabentyp wird gerne „3-mal mindestens-Aufgabe“ genannt. Dies ist gefährlich, da man durch Vermeidung des Worts „mindestens“ trotzdem denselben Aufgabentyp erhält (mehr als 99%, wenigstens 1 Treffer).
Man erkennt diesen Aufgabentyp an folgenden Formulierungen:
„**Wie viele muss man..., damit einmal...?** bzw.
„Wie oft muss..., damit einmal...?“

Von diesem Aufgabentyp existieren folgende Varianten:

6.5.1 Mindestens ein Treffer

Zufallsgröße X:= Anzahl der aufgedeckten Erbsen
geg: $n = 1\,(3,5),\ p = \frac{1}{6}$
ges: $P^n_{\frac{1}{6}}(X \geq 1)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

Für n=1: $P(X \geq 1) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\%$

Für n=3: $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216} \approx 42{,}1\%$

Für n=5: $P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776} \approx 59{,}8\%$

Kochrezept: Gegenereignis

$$\text{P(mind. 1. Treffer)} = 1 - \text{P(kein Treffer)} = 1 - (1-p)^n$$

6.5.2 Abschätzung der Längen n

Zufallsgröße X:= Anzahl der aufgedeckten Erbsen
geg: Mindestwahrscheinlichkeit $\beta = 90\%$, $p = \frac{1}{6}$
ges: n

$P(X \geq 1) \geq 0{,}9$

$\Rightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}9$

$\Rightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0{,}9$ |-1

$\Rightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0{,}1$ $|\cdot(-1)$

$\Rightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0{,}1$ |logarithmieren

$\Rightarrow n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0{,}1)$ $|:\ln\left(\frac{5}{6}\right)$

$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$

$\Rightarrow n \geq 12{,}6 \ \Rightarrow n = 13$

Analytische Geometrie

Inhaltsverzeichnis Geometrie

1 Punkte und Vektoren im dreidimensionalen Koordinatensystem 118
1.1 Das dreidimensionale Koordinatensystem 118
1.2 Zusammenhang: Punktkoordinaten - Vektorkoordinaten 118
1.3 Definition eines Vektors 119
2 Rechnen mit Vektoren 120
2.1 Addition 120
2.2 Subtraktion 120
2. 3 Multiplikation mit einer Zahl 121
2. 4 Mittelpunkt einer Strecke ermitteln 121
2.5 Schwerpunkt eines Dreiecks ermitteln 122
2.6 Abstand zweier Punkte / Länge eines Vektors 122
2.6.1 Normierung von Vektoren 123
2.6.2 Berechnung der Entfernung zweier Punkte A und B 123
2.7 Das Skalarprodukt 123
2.7.1 Winkel zwischen zwei Vektoren 123
2.7.2 Beispiel einer Winkelberechnung 124
2.7.3 Beweisen, dass zwei Vektoren senkrecht aufeinander stehen 124
2.8 Das Vektorprodukt 125
2.8.1 Gemeinsamer senkrechter Vektor 127
2.8.2 Flächeninhalt eines Parallelogramms 127
2.9 Das Spatprodukt - Berechnung von Volumina (Nur für BY) 128
2.9.1 Volumen eines Spats 128
2.9.2 Volumen eines dreiseitigen Prismas 128
2.9.3 Volumen einer dreiseitigen Pyramide 129
2.10 Lineare Abhängigkeit - Lineare Unabhängigkeit 131
2.11 Vorkenntnisse aus der Mittelstufe für die Vektorgeometrie 133
2.11.1 Spezielle Dreiecke 133
2.11.2 Spezielle Vierecke 135
3 Geraden 136
4 Ebenen 140
4.1 Ebenengleichung in Parameterform 140
4.1.1 Punkt-Richtungsform einer Ebenengleichung 140
4.1.2 Drei-Punkte-Form einer Ebenengleichung 140
4.1.3 Gleichung einer Ebene, die eine Gerade und einen weiteren Punkt enthält 140
4.1.4 Gleichung einer Ebene, die zwei sich schneidende Geraden enthält 141
4.1.5 Gleichung einer Ebene, die zwei echt parallele Geraden enthält 141
4.2 Ebenengleichung in Normalenform 141

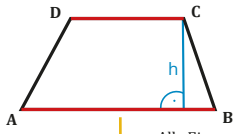
4.3 Übersicht der Ebenenformen 142
4.4 Geraden und Ebenen Zeichnen 144
4.4.1 Geraden Zeichnen 144
4.4.2 Ebenen Zeichnen 145
4.5 Lage von besonderen Geraden und Ebenen 147
5 Lagebeziehungen 148
5.1 Lagebeziehung Punkt - Gerade 148
5.2 Lagebeziehung Punkt - Ebene 149
5.3 Lagebeziehung Gerade - Gerade 151
5.4 Lagebeziehung Gerade - Ebene 154
5.5 Lagebeziehung Ebene - Ebene 158
6 Abstandsbestimmungen 162
6.1 Abstand Punkt - Punkt 162
6.2 Abstand Punkt - Gerade 162
6.2.1 Bestimmung des Lotfußpunktes mithilfe einer Hilfsebene 163
6.2.2 Bestimmung des Lotfußpunktes mithilfe des Skalarprodukts 165
6.2.3 Bestimmung des Lotfußpunktes als Extremwertaufgabe 166
6.3 Abstand Punkt - Ebene 167
6.3.1 Abstandsbestimmung mithilfe des Lotfußpunktes 167
6.3.2 Die Hesse-Normalform (HNF) 168
6.4 Abstand zweier echt paralleler Geraden 170
6.5 Abstand (parallele) Gerade - Ebene 170
6.6 Abstand zweier echt paralleler Ebenen 170
7 Spiegelungen 171
7.1 Spiegelung eines Punktes an einem Punkt 171
7.2 Spiegelung eines Punktes an einer Geraden 171
7.3 Spiegelung eines Punktes an einer Ebene 171
8 Schnittwinkel 173
8.1 Schnittwinkel-Gerade-Gerade 173
8.2 Schnittwinkel Gerade-Ebene 174
8.3 Schnittwinkel Ebene-Ebene 174
9 Die Kugel (Nur für BY) 176
9.1 Kreis und Kugel 176
9.2 Lagebeziehung Kugel - Punkt 176
9.3 Lagebeziehung Kugel - Gerade 177
9.4 Schnittkreis Kugel - Ebene 177
10 Anwendungsaufgabe (Flugzeug) 178
11 Empfohlene Abiaufgaben 180

2.11.2 Spezielle Vierecke

Trapez

Eigenschaften Trapez:

- 2 Seiten sind parallel: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $k \in \mathbb{R}$
- Flächeninhalt: $A = \frac{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CD}|}{2} \cdot h$



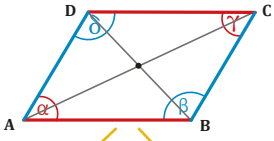
h muss mithilfe des Lotfußpunktes berechnet werden

Alle Eigenschaften des **Trapezes** und zusätzlich:

Parallelogramm

Eigenschaften Parallelogramm:

- Gegenüberliegende Seiten sind parallel: $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{BC} = r \cdot \overrightarrow{AD}$; $k, r \in \mathbb{R}$
- Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß: $\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$
- Diagonalen halbieren sich: $(M_{[AC]} = M_{[BD]})$
- Flächeninhalt: $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$



Kochrezept für Parallelogrammnachweis

$M_{[AC]} = M_{[BD]}$

$\frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{C}) = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{D}) \quad |\cdot 2$

$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D}$

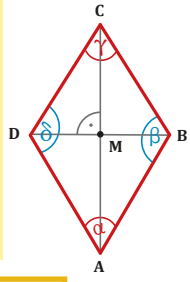
Alle Eigenschaften des **Parallelogramms** und zusätzlich:

Alle Eigenschaften des **Parallelogramms** und zusätzlich:

Raute

Eigenschaften Raute:

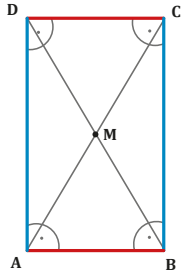
- Alle Seiten gleich lang $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$
- Diagonalen stehen senkrecht aufeinander: $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$
- Flächeninhalt: $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BD}|$



Rechteck

Eigenschaften Rechteck:

- Gegenüberliegende Seiten gleich lang: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$; $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$
- Diagonalen gleich lang: $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$
- Alle Innenwinkel 90^0: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$
- Flächeninhalt: $A = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|$



Kochrezept für Rautennachweis

Entweder:

$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D}$ und $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$

Oder: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$

Kochrezept für Rechtecknachweis

Entweder:

$\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D}$ und $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

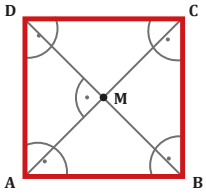
Oder: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$; $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$

und $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$

Alle Eigenschaften der Raute

Alle Eigenschaften des Rechtecks

Quadrat



Kochrezept für Quadratnachweis

Entweder: $\vec{A} + \vec{C} = \vec{B} + \vec{D}$ und $\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BD} = 0$ und $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

Oder: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$ und $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = 0$

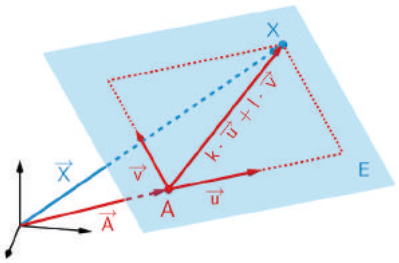
4 Ebenen

4.1 Ebenengleichung in Parameterform

Eine Ebene ist eindeutig festgelegt durch

- einen Punkt und zwei verschiedene Richtungsvektoren,
- drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen,
- eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt,
- zwei sich schneidende Geraden oder
- zwei echt parallele Geraden.

4.1.1 Punkt-Richtungsform einer Ebenengleichung

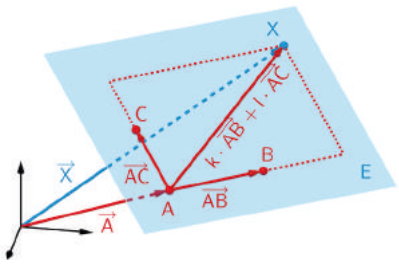


Alle Punkte X mit dem Ortsvektor $\vec{X}=\vec{A}+k\cdot\vec{u}+l\cdot\vec{v}\ (k,l\in\mathbb{R})$ bilden die Ebene E.

$$E:\vec{X}=\vec{A}+k\cdot\vec{u}+l\cdot\vec{v};\ k,l\in\mathbb{R}$$

A ist Aufpunkt und $\vec{A}$ ist Aufpunktvektor von E. Die Vektoren $\vec{u},\vec{v}$ sind linear unabhängige Richtungsvektoren von E.

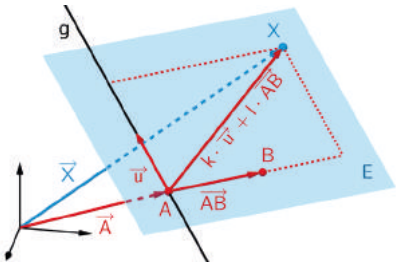
4.1.2 Drei-Punkte-Form einer Ebenengleichung



Mit A als Aufpunkt und $\overrightarrow{AB}=\vec{B}-\vec{A}$ sowie $\overrightarrow{AC}=\vec{C}-\vec{A}$ als Richtungsvektoren ergibt sich:

$$E:\vec{X}=\vec{A}+k\cdot\overrightarrow{AB}+l\cdot\overrightarrow{AC};\ k,l\in\mathbb{R}$$

4.1.3 Gleichung einer Ebene, die eine Gerade und einen weiteren Punkt enthält



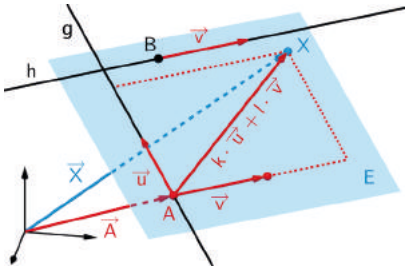
$$g:\vec{X}=\vec{A}+k\cdot\vec{u}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{X}=\vec{A}+k\cdot\vec{u}+l\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$E:\vec{X}=\vec{A}+k\cdot\vec{u}+l\cdot\overrightarrow{AB};\ k,l\in\mathbb{R}$$

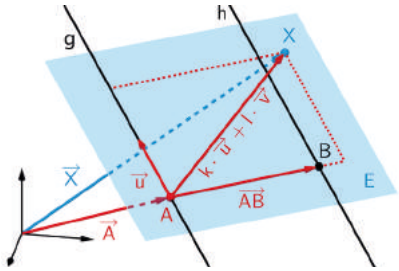
4.1.4 Gleichung einer Ebene, die zwei sich schneidende Geraden enthält



$$g: \vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u}$$
$$h: \vec{X} = \vec{B} + l \cdot \vec{v}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v}$$

$$E: \vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \vec{v};\ k,l \in \mathbb{R}$$

4.1.5 Gleichung einer Ebene, die zwei echt parallele Geraden enthält



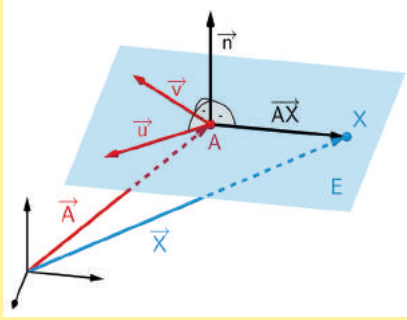
$$g: \vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u}$$
$$h: \vec{X} = \vec{B} + l \cdot \vec{v}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$E: \vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u} + l \cdot \overrightarrow{AB};\ k,l \in \mathbb{R}$$

4.2 Ebenengleichung in Normalenform

Gleichung einer Ebene in Normalenform (oder Normalform)

Jede Ebene lässt sich durch eine Gleichung in Normalenform beschreiben. Ist A ein beliebiger Punkt der Ebene E und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E, so erfüllt jeder Punkt X der Ebene E folgende Gleichungen:



Vektordarstellung

$$E: \vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$$

Koordinatendarstellung

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$$

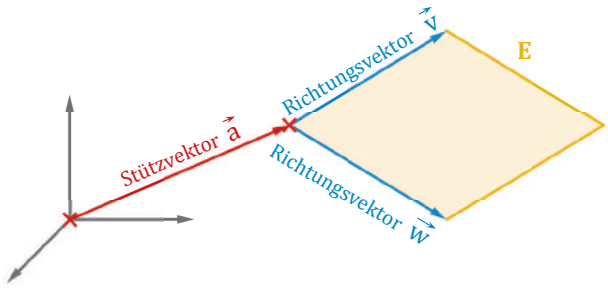
mit

$$n_0 = -(\vec{n} \circ \vec{A})$$
$$= -n_1a_1 - n_2a_2 - n_3a_3$$

Das Vektorprodukt $\vec{u} \times \vec{v}$ liefert einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E.

4.3 Übersicht der Ebenenformen

Parameterform: $E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}; r,s \in \mathbb{R}$



$\vec{v} =$ $\vec{w} =$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}; r,s \in \mathbb{R}$$

Normalenvektor

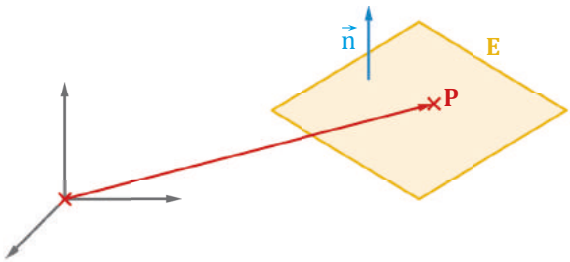
Spurpunkte

Mögliche Abituraufgabe:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|1{,}5|1)$, $B(1|1{,}5|-1)$, und $C(0|4{,}5|-1)$ gegeben. Sie liegen in einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Koordinatenform.

1. Aufstellen der Ebene in Parameterform

Vektorielle Normalenform: $E: \vec{n} \circ [\vec{x} - \vec{p}] = 0$



berechnen

$\vec{n} = \vec{v} \times \vec{w}$ $\quad \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$

$E: \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\vec{X} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

ausmultiplizieren

ausrechnen

Koordinatenform: $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Rechnung: $\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1{,}5 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0$

$E: \; 6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 - 6 = 0$

Lagebeziehung zweier Geraden $g: \vec{A} + l \cdot \vec{u}; l \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{B} + m \cdot \vec{v}; m \in \mathbb{R}$

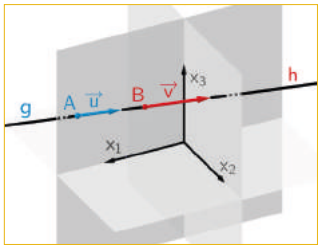
Sind die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Vielfaches voneinander?
Prüfen, ob $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ mit $k \in \mathbb{R}$ gilt.

ja

Liegt der Punkt A auf der Geraden h,?
Prüfen, ob $\vec{A} = \vec{B} + m \cdot \vec{v}$ gilt.

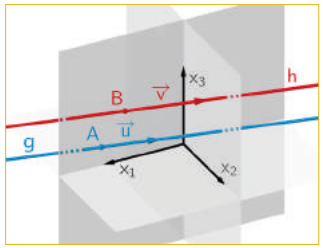
ja

Die Geraden g und h sind identisch.
g = h



nein

Die Geraden g und h verlaufen echt parallel zueinander.
g ∥ h

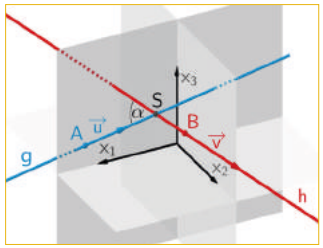


nein

Hat die Gleichung $\vec{A} + l \cdot \vec{u} = \vec{B} + m \cdot \vec{v}$ eine eindeutige Lösung?

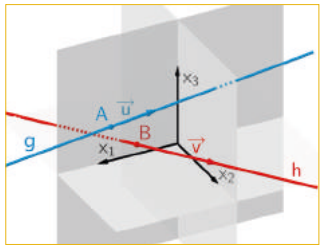
ja

Die Geraden g und h schneiden sich.



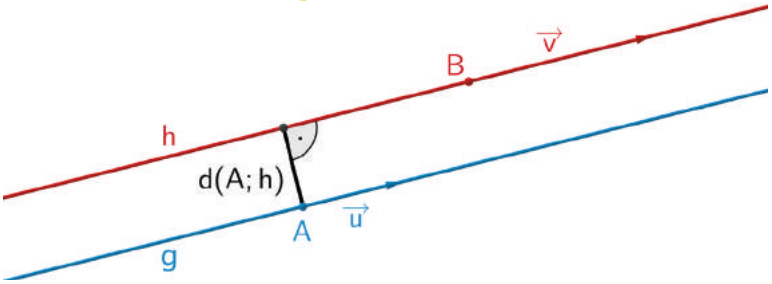
nein

Die Geraden g und h sind windschief.



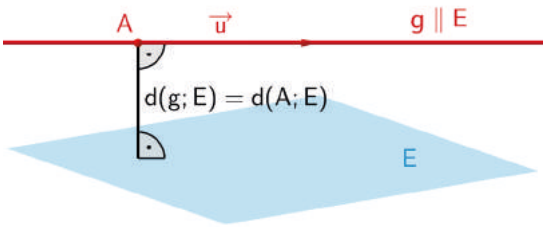
www.deinabitur.de

6.4 Abstand zweier echt paralleler Geraden



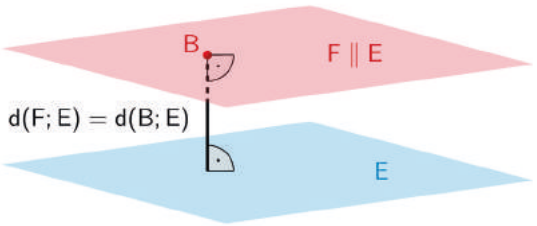
Die Abstandsbestimmung kann auf das Thema „Abstand Punkt - Gerade“ zurückgeführt werden (vgl. 7.2), indem der Abstand eines beliebigen Punktes der einen Geraden von der anderen Geraden betrachtet wird. Es ist sinnvoll, den Abstand d(A;h) des bekannten Aufpunkts A einer Geradengleichung $g: \vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u}$ von einer Geraden $h: \vec{X} = \vec{B} + l \cdot \vec{v}$ zu betrachten.

6.5 Abstand (parallele) Gerade - Ebene



Diese Abstandsbestimmung lässt sich auf das Thema „Abtand Punkt - Ebene“ zurückführen (vgl. 7.3), indem der Abstand eines beliebigen Punktes der Gerade von der Ebene betrachtet wird. Es ist sinnvoll, den Abstand d(A;E) des bekannten Aufpunkts A einer Geradengleichung $g: \vec{X} = \vec{A} + k \cdot \vec{u}$ von einer Ebene E zu betrachten.

6.6 Abstand zweier echt paralleler Ebenen



Auch diese Abstandsbestimmung kann auf das Thema „Abtand Punkt - Ebene“ (vgl. 7.3) zurückgeführt werden, indem der Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene von der anderen Ebene betrachtet wird. Es ist sinnvoll, den Abstand d(B;E) des bekannten Aufpunkts B einer Ebenengleichung $F: \vec{n_F} \circ (\vec{X} - \vec{B}) = 0$ von einer Ebene $E: \vec{n_E} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$ zu betrachten.